Mathematik für Studierende der Wirtschaftswissenschaften

1. Mengen- & Zahlenlehre

Holger Fink
Serkan Yener[1]

[1]Institut für Statistik
Ludwig-Maximilians-Universität München
Akademiestraße 1/I
80799 München
serkan.yener@stat.uni-muenchen.de

09. & 16.10.2014

Inhaltsangabe

1.1 Grundzüge der Mengenlehre

Einführung

Definition 1 (Mengen, verbal).

Nach Georg Cantor (Begründer der Mengenlehre):

> *„Eine Menge ist eine Ansammlung von wohldefinierten und wohlunterscheidbaren Objekten, die ein einheitliches Gebilde darstellen.“*

Frage: Was bedeutet “wohlunterscheidbare Objekte”?
Antwort: Während man sich beim Inhalt einer Menge nicht einschränken möchte and sie theoretisch alle möglichen Dinge (Zahlen, Namen, Gegenstände, Mengen, etc.) enthalten kann, ist es umso wichtiger, sich zu merken, dass diese Dinge nicht mehrfach in derselben Menge enthalten sein dürfen.
Frage: Was bedeutet “wohldefiniert” und “einheitliches Gebilde”?
Antwort: Eine Menge muss bzgl. ihrer Elemente klar definiert bzw. charakterisiert sein, so dass sie sich von anderem Mengen eindeutig abgrenzen bzw. unterscheiden lässt.

Einführung

Definition 1 (Mengen, formal).

Ist Objekt e ein Element der Menge M (oder kurz: „Ist e in M“), so schreibt man formal $e \in M$.
Ist Objekt e kein Element der Menge M (oder kurz: „Ist e nicht in M“), so schreibt man formal $e \notin M$.

Wichtig

Es gilt entweder $e \in M$ oder $e \notin M$, aber niemals beides gleichzeitig. Vgl. S. 50.

Noch bis zum Beginn des vergangen Jahrhunderts nahm man in der naïven Mengenlehre an, Mengen beliebig konstruieren zu können. Heute weiß man, dass der Konstruktion von Mengen gewisse logische Grenzen gesetzt sind.

Einführung

Russell'sches Paradoxon

Nach Bertrand Russell: Gegeben sei die Menge M, deren Elemente sich nicht selbst enthalten, d.h. $e \notin e$. Ist $M \in M$?

- falls $M \in M$ gilt, so muss auch $M \notin M$ gelten, da M die definitorische Eigenschaft $e \notin e$ von M erfüllt: Widerspruch!
- falls $M \notin M$ gilt, so muss nun $M \in M$ gelten, da M die definitorische Eigenschaft $e \notin e$ von M nicht erfüllt: Widerspruch!

Einfacher Lösungsvorschlag: Bei der Definition einer Menge sollten keine selbstreferentiellen Eigenschaften verwendet werden!
Praktische Erkenntnis: Mengen können sich nicht selbst als Element enthalten.

Für Anwender wie Ökonomen, die mit Mengen von Zahlen arbeiten, ist das Paradoxon nicht weiter relevant. Allerdings hat es zu diversen Weiterentwicklungen der naïven Mengenlehre geführt, die mit Hilfe von ausgeklügelten Axiomen das Paradoxon ausschließen.

Darstellung von Mengen

- Schreibweisen
  1. Listen bzw. Aufzählungen der Elemente
  2. Eigenschaften der Elemente
- Grafische Darstellung: Venn-Diagramme

ad 1) Listen

Soll eine Menge M die Zahlen $1, 2, 3, 4$ und 5 enthalten, so kann man sie explizit darstellen, indem man ihre Elemente in geschweiften Klammern zusammenfasst:

$$M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

Wichtig: Die Reihenfolge ist dabei irrelevant, d.h. man könnte M auch als $\{5, 4, 3, 2, 1\}$ oder als jede andere Permutation der Zahlen $1, 2, 3, 4$ und 5 schreiben.
Problem: Listen werden schnell unpraktikabel, wenn die Anzahl der Elemente anwächst.

Darstellung von Mengen

ad 2) Eigenschaften

Soll eine Menge M die Zahlen des Roulette-Spiels enthalten, so kann man sie implizit definieren als die "Elemente e mit der Eigenschaft, Zahl des Roulette-Spiels" zu sein:

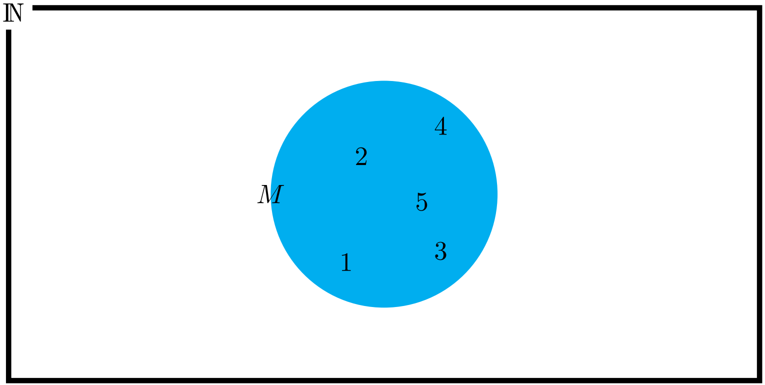
$$M = \{e \,|\, \text{Zahl des Roulette-Spiels}\}$$

Alternativ könnte man zwar M auch als $\{0, 1, 2, \ldots, 36\}$ darstellen, allerdings muss i.a. sichergestellt sein, dass die Folge der ersten Elemente die durch "$\ldots$" übersprungenen Elemente eindeutig determiniert.

Venn-Diagramme

Nach John Venn: Mengendiagramme, die dazu dienen, sich Beziehungen zwischen Elementen und Mengen oder Beziehungen zwischen Mengen zu veranschaulichen oder teilweise auch Mengenoperationen herzuleiten.

Darstellung von Mengen



Besondere Mengen

Definition 2 (Leere Menge).

Enthält eine Menge M kein Element, so nennt man sie leer und schreibt $M = \{\}$ oder $M = \emptyset$.

Manchmal ist selbst die Mengenschreibweise mittels Eigenschaften nicht genau genug, um eine Menge wohl zu definieren. Beispielsweise ist nicht klar, welche Elemente die Menge

$$M = \{e \,|\, 0 < e < 6\}$$

umfasst. Je nachdem, ob M lediglich natürliche oder reelle Zahlen enthält, würde die Menge sehr unterschiedlich aussehen.
Um den Kontext der Menge bzw. deren Elemente klarer zu machen, sind deswegen die Schreibweisen

$$M = \{e \in \mathbb{N} \,|\, 0 < e < 6\} \quad \text{bzw.} \quad M = \{e \in \mathbb{R} \,|\, 0 < e < 6\}$$

zu empfehlen.

Besondere Mengen

D.h. falls notwendig, wird vor dem Eigenschaftsoperator | eine "Übermenge" definiert, die alle für die Analyse relevanten Elemente enthält.[1]

Definition 3 (Grundmengen).

Die Grundmenge $\mathbb{G}$ ist die Menge, die alle (relevanten) Elemente enthält.

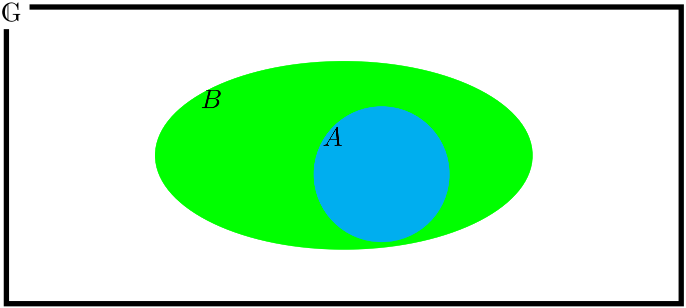
[1] Man beachte, dass während die Existenz von $\emptyset$ nachweisbar ist, die Existenz einer allgemeinen Grundmenge, die "alles" enthält, nicht möglich ist. Insbesondere ist $\mathbb{G}$, als die "Menge aller Mengen", aufgrund des Russell'schen Paradoxon nicht sinnvoll definiert.

1.2 Mengenoperationen

Mengenrelationen

Definition 4 (Teilmengen).

Gegeben seien zwei Mengen A und B. A ist eine Teilmenge von B (formal: $A \subseteq B$), wenn jedes Element von A auch in B enthalten ist.
Gilt zusätzlich noch, dass mindestens ein Element in B existiert, welches nicht in A enthalten ist, so ist A eine echte Teilmenge von B (formal: $A \subset B$).



Mengenrelationen

- Entsprechend Def. 4 kann B auch als Obermenge von A (formal: $B \supseteq A$) bzw. echte Obermenge von A (formal: $B \supset A$) bezeichnet werden.
- Zwei Mengen A and B müssen notwendigerweise gleich sein (formal: $A = B$), wenn sowohl $A \subseteq B$ als auch $B \subseteq A$ gilt.
- Ist A keine (echte) Teilmenge von B, so schreibt man formal $A \not\subset B$.

Definition 5 (Potenzmengen).

Die Menge aller Teilmengen einer Menge M bezeichnet man als Potenzmenge von M und schreibt $\mathcal{P}(M)$.

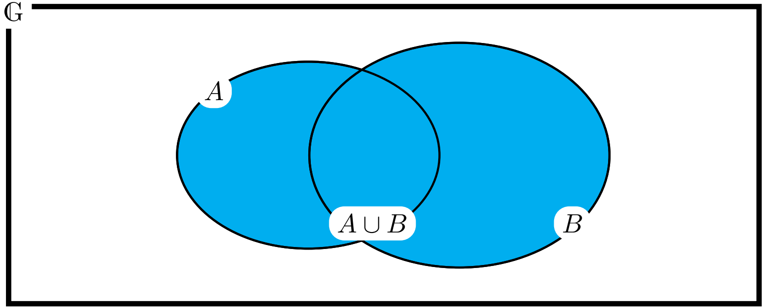
Eigenschaften von $\mathcal{P}(M)$

- Für jede Menge M gilt, dass $\emptyset, M \in \mathcal{P}(M)$.
- Die Anzahl der Elemente einer Menge M bezeichnet man als Mächtigkeit (oder Kardinalität) der Menge M und schreibt formal $|M|$. Besteht M aus n Elementen, so gilt $\left|\mathcal{P}(M)\right| = 2^n$, d.h. es können 2^n Teilmengen aus den n Elementen in M gebildet werden.

Mengenverknüpfungen

Definition 6 (Vereinigungsmengen).

Gegeben seien zwei Mengen A und B in $\mathbb{G}$. Die Menge, die alle Elemente enthält, die entweder in A oder in B (oder in beiden) sind, wird als Vereinigungsmenge von A und B (formal: $A \cup B$) bezeichnet.

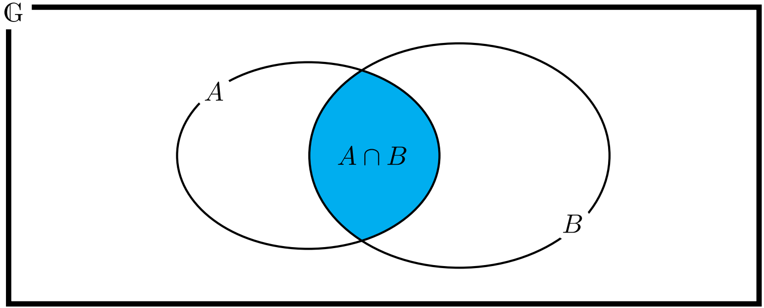


Mengenverknüpfungen

Definition 7 (Schnittmengen).

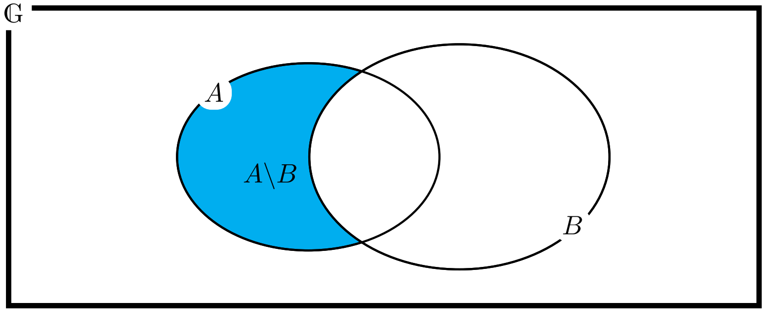
Gegeben seien zwei Mengen A und B in $\mathbb{G}$. Die Menge, die alle Elemente enthält, die sowohl in A als auch in B sind, wird als Schnittmenge von A und B (formal: $A \cap B$) bezeichnet.

Mengen, deren Schnittmenge leer ist, werden als disjunkt (oder punktfremd) bezeichnet.



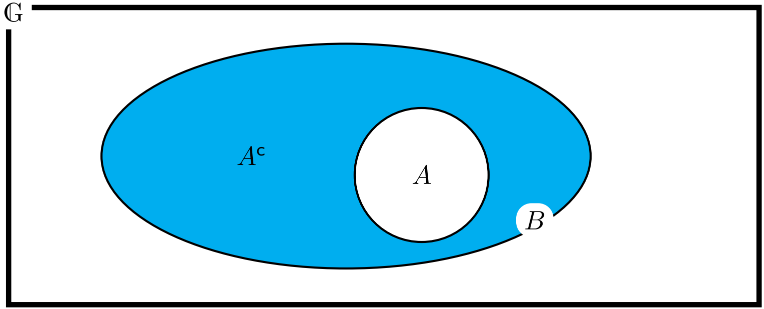
Definition 8 (Differenzmengen).

Gegeben seien zwei Mengen A und B in $\mathbb{G}$. Die Menge, die alle Elemente enthält, die in A jedoch nicht in B sind, wird als Differenzmenge von A und B (formal: $A \backslash B$) bezeichnet.



Definition 9 (Komplementärmengen).

Gegeben seien zwei Mengen A und B, wobei $A \subseteq B \subset \mathbb{G}$. Die Komplementärmenge von A bzgl. B wird definiert als $A^{\mathsf{c}} := B \setminus A$.
Ist keine Referenzmenge vorgegeben, wird diese implizit als $\mathbb{G}$ angenommen, und das Komplement von A allgemein als $A^{\mathsf{c}} := \mathbb{G} \setminus A$ verstanden.



Mengenverknüpfungen

Theorem 10 (Idempotentgesetze).

Gegeben sei eine Menge A. Dann gilt:

$$A \cup A = A$$
$$A \cap A = A$$

Theorem 11 (Kommutativgesetze).

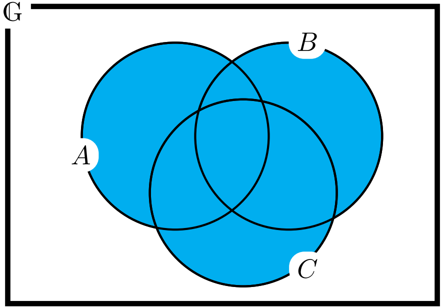
Gegeben seien zwei Mengen A und B. Dann gilt:

$$A \cup B = B \cup A$$
$$A \cap B = B \cap A$$

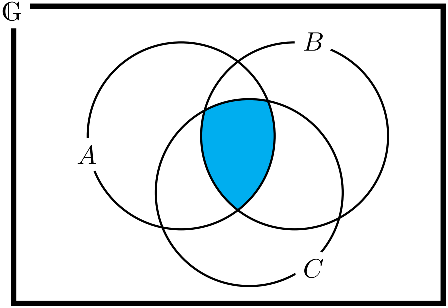
Theorem 12 (Assoziativgesetze).

Gegeben seien drei Mengen A, B und C. Dann gilt:

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$
$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$



$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$



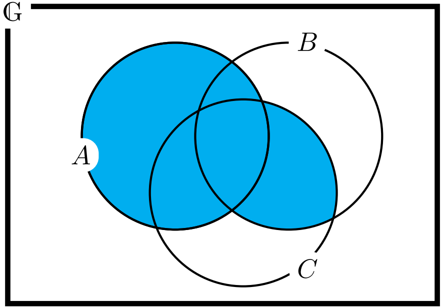
$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

Mengenverknüpfungen

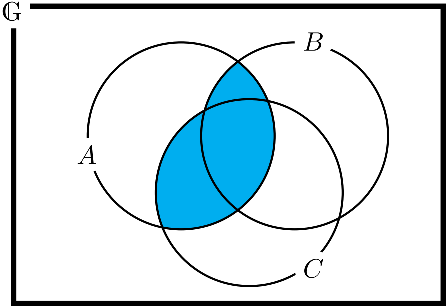
Theorem 13 (Distributivgesetze).

Gegeben seien drei Mengen A, B und C. Dann gilt:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$



$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$



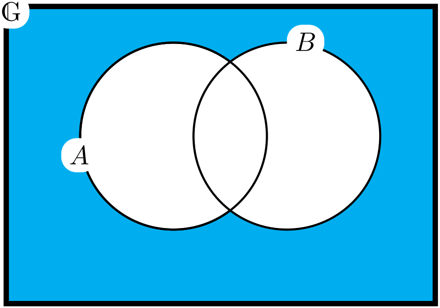
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Mengenverknüpfungen

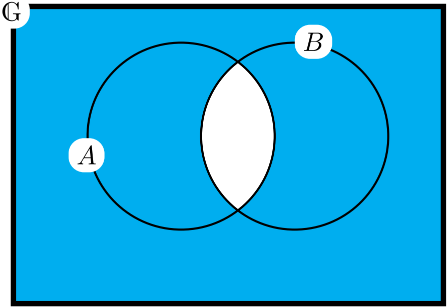
Theorem 14 (De Morgan'sche Gesetze).

Gegeben seien zwei Mengen A und B, wobei $A, B \subset \mathbb{G}$. Dann gilt:

$$(A \cup B)^{\mathsf{c}} = A^{\mathsf{c}} \cap B^{\mathsf{c}}$$
$$(A \cap B)^{\mathsf{c}} = A^{\mathsf{c}} \cup B^{\mathsf{c}}$$



$(A \cup B)^{\mathsf{c}} = A^{\mathsf{c}} \cap B^{\mathsf{c}}$



$(A \cap B)^{\mathsf{c}} = A^{\mathsf{c}} \cup B^{\mathsf{c}}$

1.3 Zahlen als Mengen

Definition 15 (Die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$).

Es sei die Menge der natürlichen Zahlen definiert als $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$.
Manchmal findet sich in der Literatur auch die Konvention:

$$\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$$
$$\mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

da es keinen Konsens darüber gibt, ob "0" wirklich ein Element der natürlichen Zahlen ist.

Konstruktion von $\mathbb{N}$:

(1) Starte mit dem ersten Element (hier: "0").
(2) Addiere "1" zum aktuellen Element, um die nächste (d.h. nächstgrößere) natürliche Zahl zu erhalten.
(3) Wiederhole (2) unendlich oft.

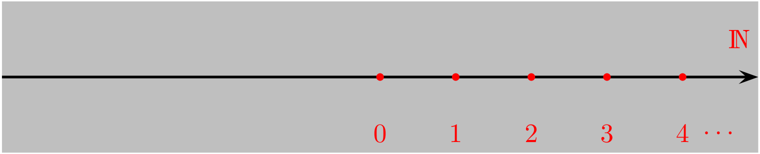
Aus der Konstruktion von $\mathbb{N}$ folgen zwei Eigenschaften:

1. $\mathbb{N}$ ist eine diskrete (oder abzählbare) Folge von Zahlen.
2. $\mathbb{N}$ besitzt unendlich viele Elemente, d.h. $|\mathbb{N}| = \infty$.

Wichtig:

- Obwohl $\mathbb{N}$ unendlich viele Elemente besitzt, enthält sie nicht "∞" per se, d.h. $\infty \notin \mathbb{N}$. Diese Eigenschaft gilt auch für alle noch vorzustellenden Zahlenmengen.
- Für den Fall, dass es notwendig ist, "∞" in eine Zahlenmenge aufzunehmen, definiert man eine sog. erweiterte Zahlenmenge mittels Querstrich über dem Mengensymbol. Beispielsweise ist die erweitere Menge der natürliche Zahlen definiert als $\overline{\mathbb{N}} := \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.
- "0" wird bzgl. $\mathbb{N}$ und der Operation "+" als neutrales Element bezeichnet, weil $n + 0 = n = 0 + n$ für all $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Üblicherweise veranschaulicht man Zahlenmengen mit Hilfe eines Zahlenstrahls.



Beispiele

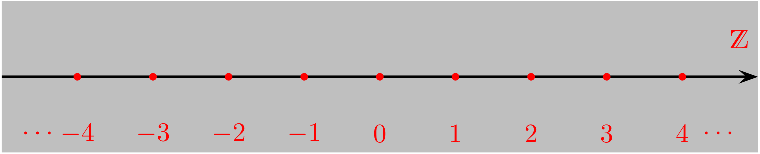
- Die Zahlen eines Roulette-Rads können als $M = \{n \in \mathbb{N} \,|\, 0 \leqslant n \leqslant 36\}$ dargestellt werden.
- Zeit ist ein wichtiger Faktor in ökonomischen Analysen, da man oft an der zeitlichen Entwicklung (Dynamik) von ökonomischen Variablen interessiert ist. Der Zeitstrahl (bzw. Zeitachse) wird üblicherweise als die Menge
$$T = \{0, 1, 2, 3, \ldots\} = \{t \in \mathbb{N}\}$$
dargestellt. Interpretiert man $t = 0$ als gegenwärtigen Zeitpunkt (d.h. heute), so repräsentiert $T \backslash \{0\}$ alle zukünftigen Zeitpunkte (d.h. die gesamte, endlose Zukunft).

Unzulänglichkeit von $\mathbb{N}$: Viele ökonomische Variablen oder Daten können negative Werte annehmen, z.B. Wachstumsraten (von Aktienkursen, Bruttosozialprodukten, etc.), Realzinsen, etc.
<u>Lösung:</u> Erweiterung von $\mathbb{N}$ um die negativen (natürlichen) Zahlen.

Definition 16 (Die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$).

Es sei die Menge der ganzen Zahlen definiert als
$\mathbb{Z} := \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$.

- Da die Konstruktion von $\mathbb{Z}$ analog zu jener von $\mathbb{N}$ ist, gelten für $\mathbb{Z}$ die gleichen Eigenschaften, die bereits aus der Konstruktion von $\mathbb{N}$ folgten.
- Während "0", analog zu $\mathbb{N}$, ebenso das neutrale Element für $\mathbb{Z}$ bzgl. "+" ist, lässt sich jedoch nun auch ein inverses Element "$-z$" definieren, da $z + (-z) = 0 = (-z) + z$ für alle $z \in \mathbb{Z}$ gilt.



Aber: $\mathbb{Z}$ (wie auch $\mathbb{N}$) ist immer noch unzulänglich für allgemeine, quantitative Analysen!

Beispiel

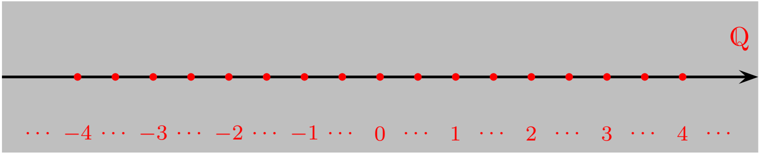
Die Europäische Zentralbank (EZB) senkte ihren Leitzins am 05.06.2014 auf $0,15\%$.
Es gilt $0,0015 = \frac{15}{1000} \notin \mathbb{Z}$, d.h. $\mathbb{Z}$ muss um Dezimalbrüche erweitert werden.

Definition 17 (Die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$).

Es sei die Menge der rationalen Zahlen definiert als

$$\mathbb{Q} := \left\{ \frac{p}{q} \,\middle|\, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z} \backslash \{0\} \right\} .$$

Die Division durch "0" ist nicht gestattet (definiert), da für ein fixes p und ein kleiner werdendes q der Quotient $\frac{p}{q}$ immer größer wird, d.h. für $q = 0$ unendlich groß wäre. Jedoch muss weiterhin $\frac{p}{q} = \infty \notin \mathbb{Q}$ gelten.



Unzulänglichkeit von $\mathbb{Q}$: Wichtige Dezimalzahlen, wie die Kreiszahl $\pi = 3.14159\ldots$ oder die Euler'sche Zahl $\mathsf{e} = 2,71828\ldots$, können nicht als Dezimalbruch dargestellt werden. Diese Zahlen mit unendlich vielen Nachkommastellen, die sich nicht periodisch wiederholen, werden als irrationale Zahlen bezeichnet.

Definition 18 (Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$).

Es sei die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ definiert als die Vereinigungsmenge aus $\mathbb{Q}$ und der Menge aller irrationalen Zahlen.

Man kann zeigen, dass das "Aufüllen" von $\mathbb{Q}$ durch die Menge aller irrationalen Zahlen auf dem Zahlenstrahl nun keine (schwarzen) Lücken mehr hinterlässt. Man sagt dazu auch, dass die Menge der reellen Zahlen vollständig ist in dem Sinne, dass $\mathbb{R}$ ein Kontinuum bildet.

Da also $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ gilt, können wir alle Ordnungsrelationen ("$<$", "$\leqslant$", "$=$", "$>$", "$\geqslant$") und Rechenregeln ("$+$", "$-$", "$\cdot$", "$/$") für $\mathbb{R}$, auf die Teilmengen von $\mathbb{R}$ anwenden.
Um die Teilmengen der positiven bzw. negativen Zahlen einer entsprechenden Zahlenmenge zu definieren, werden diese Zahlenmengen üblicherweise mit einem "$+$" bzw. "$-$" indiziert, z.B.

$$\mathbb{Z}_- := \{\ldots, -3, -2, -1\} = \mathbb{Z} \backslash \mathbb{N}$$
$$\mathbb{Z}_+ := \{1, 2, 3 \ldots\} = \mathbb{N} \backslash \{0\}$$

Exkurs: Mengen von Mengen

Definition 19 (Klassen von Mengen).

Gegeben sei eine nichtleere (Index)Menge I. Wenn jedem $i \in I$ eine Menge $M_i \subset \mathbb{G}$ zugeordnet werden kann, bezeichnet man

$$(M_i)_{i \in I} := \{M_i \subset \mathbb{G} \mid i \in I \neq \emptyset\}$$

als eine Klasse (oder Familie) von Mengen.

Ist eine Klasse von Mengen wohldefiniert, dann lassen sich wichtige Mengenoperationen verallgemeinern (bzw. die Notation vereinfachen). So schreibt man beispielsweise $\bigcup_{i \in I} M_i$ für die Vereinigungsmenge aller Mengen in $(M_i)_{i \in I}$ oder $\bigcap_{i \in I} M_i$ für die Schnittmenge aller Mengen in $(M_i)_{i \in I}$. Der entscheidende Vorteil dieser Notationen ist, dass hierbei sehr allgemeine Indexmengen möglich sind, für die expliziten Mengenoperationen eher umständlich darstellbar wären. Üblicherweise werden entweder endliche Indexmengen $I = \{n \in \mathbb{N} \mid n < \infty\}$ oder abzählbar unendliche Indexmengen $I = \mathbb{N}$ und $I = \mathbb{Z}$ verwendet.

Exkurs: Mengen von Mengen

Obwohl $I = \mathbb{R}$, d.h., eine unabzählbare Indexmenge, theoretisch zulässig ist, kann dies im Weiteren zu spitzfindigen Problemen führen, weswegen wir diesen Fall generell ausschließen.

Definition 20 (Partitionen).

Die Mengen $(M_i)_{i \in I}$ bilden eine Partition der Menge $\mathbb{G}$, wenn alle Mengen $(M_i)_{i \in I}$ paarweise disjunkt sind und $\bigcup_{i \in I} M_i = \mathbb{G}$ gilt.

Exkurs: Kartesische Produkte

Der bis dato definierte Mengenbegriff ist wenig hilfreich, wenn die Reihenfolge der in einer Menge enthaltenen Elemente eine entscheidende Rolle spielt. (Beispielsweise wäre es fatal, das jährliche Bruttosozialprodukt des letzten Jahrzehnts in einer Menge zusammenzufassen.)
Eine Anordnung von n Objekten, deren Reihenfolge fest vorgegeben ist, bezeichnet man als n-Tupel und schreibt formal:

$$(\text{Objekt } 1, \text{Objekt } 2, \text{Objekt } 3, \ldots, \text{Objekt } n)$$

Die Objekte eines Tupels werden auch Komponenten genannt.
Der eigentliche Nutzen von Tupeln ist ihre Funktionsweise, die der eines "Datencontainers" ähnelt und es erlaubt, aus verschiedenen Mengen Elemente in den entsprechenden Komponenten zu kombinieren.

Exkurs: Kartesische Produkte

Beispiel: 2-Tupel

Es soll die Menge aller 2-Tupeln, auch *Paare* genannt, gebildet werden, deren erste Komponente aus den Elementen der Menge $A = \{1, 2, 3\}$ und deren zweite Komponente aus den Elementen der Menge $B = \{x, y, z\}$ gebildet werden sollen. In einem ersten Schritt werden alle möglichen Paare in einer systematischen Weise gebildet, am besten in der Form einer *Matrix* (vgl. Kapitel "Vektorräume"):

$$\begin{array}{c|ccc}
 & & B & \\
\hline
 & (1, x) & (1, y) & (1, z) \\
A & (2, x) & (2, y) & (2, z) \\
 & (3, x) & (3, y) & (3, z)
\end{array}$$

Schließlich werden diese Paare in der Menge

$$\big\{(1, x), (1, y), (1, z), (2, x), (2, y), (2, z), (3, x), (3, y), (3, z)\big\}$$

zusammengefasst.

Exkurs: Kartesische Produkte

Man kann die gesamte Prozedur formal knapp mit Hilfe des sog. Kartesischen Produkts

$$A \times B := \left\{ (a, b) \,|\, a \in A, b \in B \right\}$$

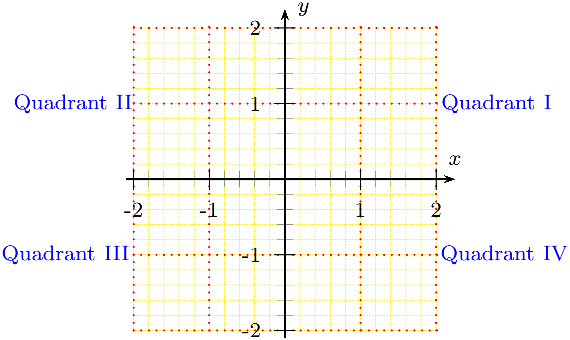
darstellen.
Von besonderer Bedeutung sind die Kartesischen Produkte

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 &:= \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ \mathbb{R}^3 &:= \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ \mathbb{R}^n &:= \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n\text{-mal}} \end{aligned}$$

wobei $n \in \mathbb{N}$. Ähnlich den Klassen von Mengen lässt sich das Kartesische Produkt durch $\bigtimes_{i \in I} A_i$ verallgemeinern.
Kartesische Produkte bis zur Dimension $n = 3$ erfreuen sich großer Beliebtheit, weil sie der Illustration mathematischer Zusammenhängen dienen. Beispielsweise wird $\mathbb{R}^2$ auch als zweidimensionales Kartesisches Koordinatensystem bezeichnet, das alle Paare der Menge $\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \right\}$ enthält.

Exkurs: Kartesische Produkte

Die zueinander senkrecht angeordneten Zahlenstrahlen sind die Koordinatenachsen, welche sich im Koordinatenursprung $(0, 0)$ schneiden. Wenn nicht anders definiert, gilt die Konvention, dass auf der horizontalen Achse (Abszisse) die erste Komponente von (x, y) and auf der vertikalen Achse (Ordinate) die zweite Komponente von (x, y) abgetragen wird.



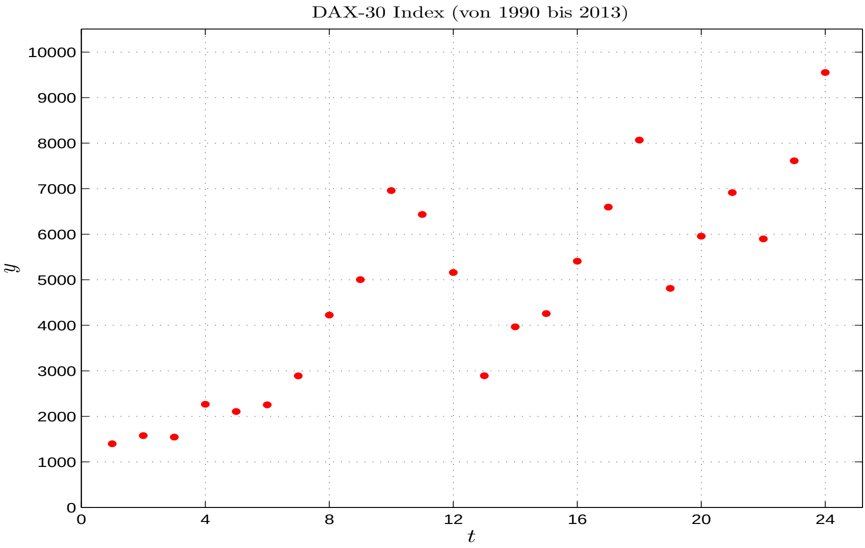
Exkurs: Kartesische Produkte

Eine empirisch besonders wichtige Anwendung der Kartesischen Ebene ist die Darstellung von Daten. Beispielsweise kann jedem Jahr t zwischen 1990 und 2013 der entsprechende jährliche Schlusskurs des DAX-30 Indexes y zugeordnet werden, so dass der gesamte Datensatz in die Form

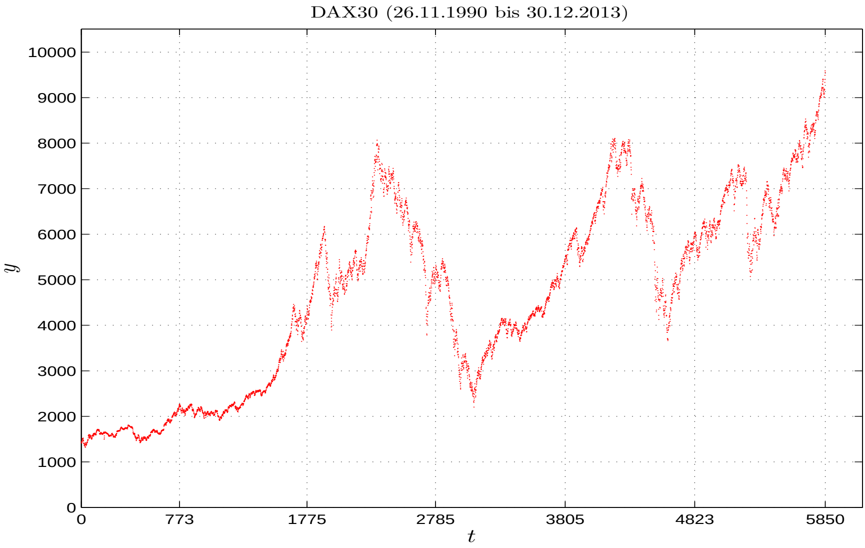
$$\left\{(t, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R} \,|\, 1 \leqslant t \leqslant 24, y \geqslant 0\right\}$$

gebracht werden kann. (Vgl. das sog. Zeitreihendiagramm auf S. 38.)
Da $t \in \mathbb{N}$ abzählbar ist, sagt man auch, dass y in diskreter Zeit vorliegt.
Zeichnet man statt jährlichen nun tägliche Schlusskurse auf, gilt zwar immer noch $t \in \mathbb{N}$, jedoch erscheinen die t-Werte auf der Abszisse jetzt "dichter" angeordnet zu sein. (Vgl. S. 39.)
Hätte man theoretisch unabzählbar viele Beobachtungen, wäre $t \in \mathbb{R}_+$ und somit nicht mehr diskret, sondern (zeit)stetig.

Exkurs: Kartesische Produkte



Exkurs: Kartesische Produkte



Die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$

Unzulänglichkeit von $\mathbb{R}$: Es ist i.a. immer noch nicht möglich, relativ elementare Probleme innerhalb von $\mathbb{R}$ zu lösen.

Beispiel: Lösung von quadratischen Gleichungen

Die quadratische Gleichung der Form

$$z^2 + pz + q = 0 \qquad \text{für } p, q \in \mathbb{R} \tag{1}$$

besitzt die zwei Lösungen

$$z_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

welche für $p^2 < 4q$ nicht in $\mathbb{R}$ definiert sind, da die Quadratwurzel von negativen, reellen Zahlen nicht in $\mathbb{R}$ definiert ist. Man kann jedoch zeigen, dass die Lösungen $z_{1,2}$ für (1) immer existieren, wenn $z \in \mathbb{C}$.

Die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$

Definition 21 (Die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$).

Es sei die Menge der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ definiert als die Menge aller Zahlen

$$z := x + \mathrm{i}y \qquad \text{mit } x, y \in \mathbb{R}, \text{ wobei } \mathrm{i} := \sqrt{-1}.$$

Der Realteil einer komplexen Zahl z ist definiert als $\mathsf{Re}(z) := x$, während der Imaginärteil definiert ist als $\mathsf{Im}(z) := y$.

Eigenschaften von $z \in \mathbb{C}$:

- Die komplexe Konjugierte einer komplexen Zahl $z = x + \mathrm{i}y$ ist definiert als $\bar{z} := x - \mathrm{i}y$ und ist von besonderer Bedeutung, da sie es erlaubt, den Betrag einer komplexen Zahl $|z| := \sqrt{z \cdot \bar{z}}$ zu berechnen. (Vgl. S. 58)
- Obwohl $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ und, für $y = 0$, $z = \bar{z} = x \in \mathbb{R}$ gilt, sind Ordnungsrelationen für $\mathbb{R}$ nicht ohne weiteres auf $\mathbb{C}$ erweiterbar, sondern nur mittels einer lexikographischen Ordnung: Zwei komplexe Zahlen werden zunächst bzgl. ihrer Realteile verglichen. Falls die Realteile gleich sind, werden daraufhin die Imaginärteile verglichen.

Die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$

- Da jede komplexe Zahl z eindeutig durch das geordnete Paar $\big(\mathsf{Re}(z), \mathsf{Im}(z)\big)$ determiniert ist, kann z als ein Punkt in der Euklid'schen Ebene $\mathbb{R}^2$ dargestellt werden.
- Wie wir noch im Kapitel "Vektorräume" sehen werden, ist $z \in \mathbb{C}$ nichts weiter als ein Vektor in $\mathbb{R}^2$, der formal als

$$\vec{z} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

geschrieben und als ein Pfeil repräsentiert wird, der im Ursprung des Koordinatenkreuzes beginnt und im Punkt (x, y) endet. Die Länge r des Vectors $\vec{z}$ wird durch seine Norm

$$||\,\vec{z}\,|| := \sqrt{x^2 + y^2} = r = \sqrt{z \cdot \bar{z}} = |z|$$

gemessen.

Die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$

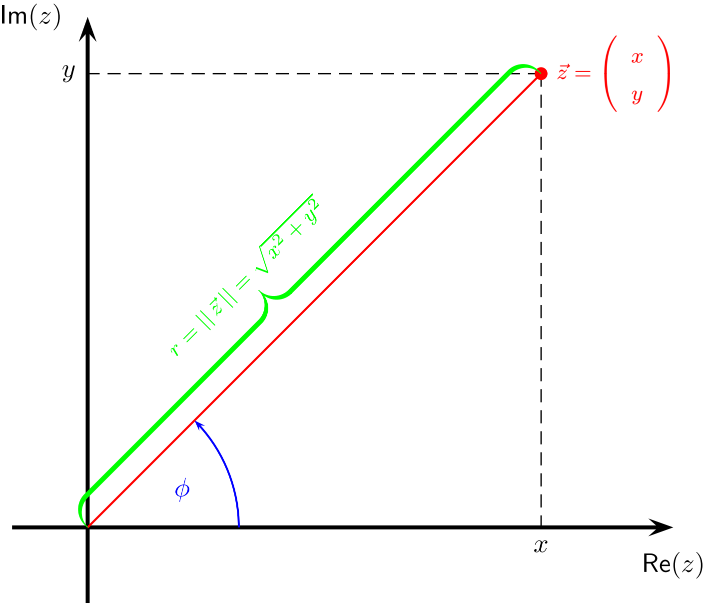
- Alternativ kann jede komplexe Zahl z mittels der trigonometrischen Formeln (2) und (3) in die äquivalente Form ihrer Polarkoordinaten (r, ϕ) gebracht werden:

$$z = \underbrace{r\cos(\phi)}_{=x} + \mathrm{i}\,\underbrace{r\sin(\phi)}_{=y}$$

- Einige wichtige Rechenregeln für komplexe Zahlen lauten:

$$\begin{aligned}
z_1 + z_2 &= (x_1 + \mathrm{i}y_1) + (x_2 + \mathrm{i}y_2) = (x_1 + x_2) + \mathrm{i}(y_1 + y_2) \in \mathbb{C} \\
z_1 \cdot z_2 &= (x_1 + \mathrm{i}y_1) \cdot (x_2 + \mathrm{i}y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + \mathrm{i}(x_1y_2 + x_2y_1) \in \mathbb{C} \\
z + \bar{z} &= (x + \mathrm{i}y) + (x - \mathrm{i}y) = 2x \in \mathbb{R} \subset \mathbb{C} \\
z - \bar{z} &= (x + \mathrm{i}y) - (x - \mathrm{i}y) = 2\mathrm{i}y \in \mathbb{C} \\
z \cdot \bar{z} &= (x + \mathrm{i}y) \cdot (x - \mathrm{i}y) = x^2 + y^2 \in \mathbb{R} \subset \mathbb{C}
\end{aligned}$$

Die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$

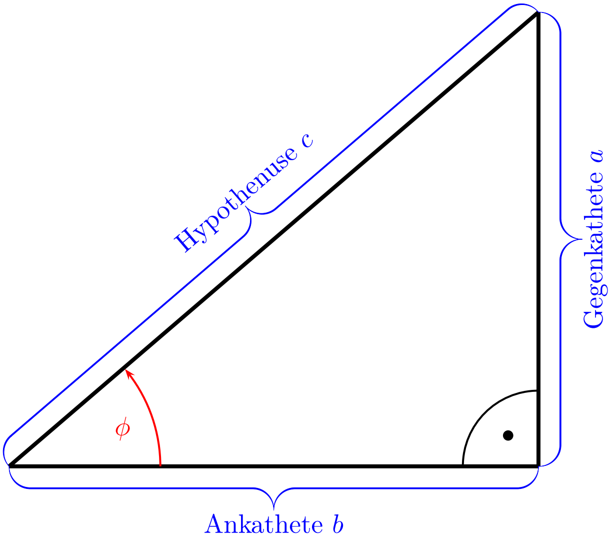


1.4 Miscellanea

Griechische Buchstaben

Name	klein	groß	Name	klein	groß
Alpha	α	A	Nü	ν	N
Beta	β	B	Xi	ξ	Ξ
Gamma	γ	Γ	Omikron	o	O
Delta	δ	Δ	Pi	π, ϖ	Π
Epsilon	ϵ, ε	E	Rho	ρ, ϱ	P
Zeta	ζ	Z	Sigma	σ, ς	Σ
Eta	η	H	Tau	τ	T
Theta	θ, ϑ	Θ	Üpsilon	υ	Υ
Iota	ι	I	Phi	ϕ, φ	Φ
Kappa	κ	K	Chi	χ	X
Lambda	λ	Λ	Psi	ψ	Ψ
Mü	μ	M	Omega	ω	Ω

Trigonometrie



Trigonometrie

Definition 22 (Trigonometrische Formeln).

In einem rechtwinkligen Dreieck sind die folgenden trigonometrischen Formeln definiert:

$$\text{Sinus} \qquad \mathsf{sin}(\phi) := \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypothenuse}} = \frac{a}{c} \tag{2}$$

$$\text{Cosinus} \qquad \mathsf{cos}(\phi) := \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypothenuse}} = \frac{b}{c} \tag{3}$$

$$\text{Tangens} \qquad \mathsf{tan}(\phi) := \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \frac{a}{b}$$

$$\text{Cotangens} \qquad \mathsf{cot}(\phi) := \frac{\text{Ankathete}}{\text{Gegenkathete}} = \frac{b}{a}$$

Trigonometrie

Theorem 23 (Fundamentale Eigenschaften).

$$\sin(\phi)^2 + \cos(\phi)^2 = 1$$

$$\tan(\phi) = \frac{\sin(\phi)}{\cos(\phi)} = \frac{1}{\cot(\phi)}$$

Aussagenlogik

Definition 24 (Aussagen).

Eine Aussage A ist ein Satz, der entweder richtig oder falsch ist.
Die Negation $\neg A$ der Aussage A ist wahr, wenn A falsch ist.
Eine Tautologie ist ein Satz, der immer richtig ist.
Ein Widerspruch ist ein Satz, der immer falsch ist, d.h. die Negation einer Tautologie.

Wahrheitstabelle:

A	$\neg A$
w	f
f	w

Definition 25 (Logische Verknüpfungen).

Die Disjunktion $A \vee B$ der Aussagen A and B ist wahr, wenn mindestens eine der beiden Aussagen wahr ist.
Die Konjunktion $A \wedge B$ der Aussagen A and B ist wahr, wenn sowohl A als auch B wahr ist.

Wahrheitstabelle:

A	B	$A \vee B$
w	w	w
w	f	w
f	w	w
f	f	f

A	B	$A \wedge B$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	f

Definition 26 (Logische Folgerungen).

Die Implikation $A \Rightarrow B$ der Aussagen A and B ist falsch, wenn A wahr und B falsch ist. In allen anderen Fällen ist sie wahr, d.h., $\neg A \vee B$ ist wahr.
Während A als die hinreichende Bedingung für B bezeichnet wird, ist B die notwendige Bedingung für A.

Gelesen wird $A \Rightarrow B$ als „Wenn A gilt, dann gilt B." oder „Es gilt B, wenn A gilt.".

Wahrheitstabelle:

A	B	$A \Rightarrow B$
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

Definition 27 (Logische Äquivalenzen).

Die Äquivalenz $A \Leftrightarrow B$ der Aussagen A und B ist wahr, wenn entweder sowohl A als auch B wahr ist oder sowohl A als auch B falsch ist, d.h., $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$ wahr ist.

Gelesen wird $A \Leftrightarrow B$ als „A gilt dann und nur dann, wenn B gilt.“.

Wahrheitstabelle:

A	B	$A \Leftrightarrow B$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	w

Aussagenlogik

Es besteht eine enge Verbindung zwischen Aussagenlogik und Mengenlehre, die es erlaubt, mengentheoretische Aussagen mittels des aussagenlogischen Instrumentariums auszudrücken. Definiert man

$$A := \{x \in X \mid x \in A\} ,$$

lässt sich beispielsweise die Vereinigungsmenge $A \cup B$ formal ausdrücken als

$$\begin{aligned} A \cup B &:= \{x \in X \mid x \in A\} \cup \{x \in X \mid x \in B\} = \{x \in X \mid x \in A \cup B\} \\ &= \{x \in X \mid x \in A \vee x \in B\} . \end{aligned}$$

Definition 28 (Quantoren).

Der Allquantor $\forall$ in einer Aussage bedeutet: „für alle".
Der Existenzquantor $\exists$ in einer Aussage bedeutet: „es existiert mindestens ein".
Der eindeutige Existenzquantor $\exists!$ in einer Aussage bedeutet: „es existiert genau ein".

Aussagenlogik

Beispiele

1. $\forall\, x \in \mathbb{R} : x^2 \geqslant 0$ besagt, dass „für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt, dass $x^2 \geqslant 0$“.
2. $\nexists\, x \in \mathbb{R} : x^2 < 0$ besagt, dass „kein $x \in \mathbb{R}$ existiert, für das $x^2 < 0$“.
3. $\exists!\, x \in \mathbb{R} : x^2 = 0$ besagt, dass „genau ein $x \in \mathbb{R}$ existiert, für das $x^2 = 0$“.

Definition 29 (Intervalle).

$\forall\, a, b, x \in \mathbb{R}$:

1. offene Intervalle $(a, b) := \{x \mid a < x < b\}$
2. abgeschlossene Intervalle $[a, b] := \{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$
3. halboffene Intervalle $\begin{cases} [a, b) := \{x \mid a \leqslant x < b\} \\ (a, b] := \{x \mid a < x \leqslant b\} \end{cases}$

Definition 30 (Uneigentliche Intervalle).

$\forall\, a, b, x \in \mathbb{R}$:

1. $(a, \infty) := \{x \mid x > a\}$
2. $[a, \infty) := \{x \mid x \geqslant a\}$
3. $(-\infty, b) := \{x \mid x < b\}$
4. $(-\infty, b] := \{x \mid x \leqslant b\}$

Theorem 31 (Rechenregeln für Ungleichungen).

$\forall\, a, b, c, d \in \mathbb{R}$:

1. $(a < b) \wedge (b < c) \Rightarrow a < c$
2. $a < b \Rightarrow a + c < b + c$
3. $(a < b) \wedge (c < d) \Rightarrow a + c < b + d$
4. $(a < b) \wedge (c > 0) \Rightarrow a \cdot c < b \cdot c$
5. $(a < b) \wedge (c < 0) \Rightarrow a \cdot c > b \cdot c$
6. $(b > 0) \wedge (a < b) \wedge (0 < c < d) \Rightarrow a \cdot c < b \cdot d$
7. $0 < a < b \Rightarrow a^2 < b^2$
8. $(0 < a < b) \vee (a < b < 0) \Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$
9. $a < 0 < b \Rightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$

Zahlenbereiche and Abstände

Definition 32 (Absolute Beträge).

Der absolute Betrag einer reellen Zahl a ist definiert als

$$|a| := \begin{cases} a & \text{für } a \geqslant 0 \\ -a & \text{sonst} \end{cases}$$

Theorem 33 (Eigenschaften von Beträgen).

$\forall\, a, b \in \mathbb{R}$:

1. $|a| \geqslant 0$
2. $|-a| = |a|$
3. $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$
4. $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$

Dreiecksungleichungen:

1. $|a + b| \leqslant |a| + |b|$
2. $|a - b| \geqslant |a| - |b|$

Wichtig

Der absolute Betrag ist das natürliche Abstandsmaß für die Menge der reellen Zahlen. In der obigen Definition ist der (implizite) Bezugspunkt der Ursprung von $\mathbb{R}$, d.h. $|a|$ ist eigentlich als $|a - 0|$ zu verstehen.
Ein auf $\mathbb{R}^n$ verallgemeinertes Distanzmaß wird im Kapitel "Vektorräume" vorgestellt.

Lösen von Gleichungen mit einer Unbekannten

Die Bestandteile einer Gleichung werden in Variablen and Parameter unterteilt. Obwohl beide meistens durch Buchstaben repräsentiert werden, liegt ihr Unterschied darin, dass der Wert einer Variablen als unbekannt und der eines Parameters als gegeben angenommen wird. Deshalb werden Variablen alternativ auch als Unbekannte und Parameter als Konstante bezeichnet.
Gleichungen, die nach einer Unbekannten gelöst werden sollen, werden auch Bestimmungsgleichungen genannt. Als Lösungen einer Bestimmungsgleichung werden alle Werte einer Variablen bezeichnet, die Gleichung erfüllen. Alle Lösungen werden in der sog. Lösungsmenge $\mathbb{L}$ zusammengefasst.
Prinzipiell können Gleichungen in linear und nichtlinear unterteilt werden. Die generische Form einer linearen Gleichung ist

$$ax + b = 0 \tag{4}$$

welche auch als implizite Form bezeichnet wird. In (4) ist x die Variable, während a und b Parameter darstellen. Den Wert der Unbekannten, der (4) löst, erhält man in der expliziten Form

Lösen von Gleichungen mit einer Unbekannten

$$x = -\frac{b}{a} \tag{5}$$

welche durch äquivalente Umformungen von (4) ermittelt wird. Man beachte, dass jede Gleichung eine implizite Form besitzt, während dies i.a. nicht für die explizite Form gilt.

Zu äquivalenten Umformungen zählen ganz allgemein die Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division beider Seiten mit der gleichen Zahl oder die Anwendung einer geeigneten Umkehroperation (Annihilation) auf beiden Seiten. Hiervon ausgenommen sind Rechenoperationen, die nicht definiert sind, und die Multiplikation mit Null.

Lösen von Gleichungen mit einer Unbekannten

Beispiel: Äquivalente Umformungen

Falls definiert, kann man mittels äquivalenter Umformungen aus $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ die folgenden Ausdrücke herleiten:

1. $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$
2. $\frac{c}{a} = \frac{d}{b}$
3. $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$
4. $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$
5. $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$
6. $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$
7. $\frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d}$
8. $\frac{a}{b-a} = \frac{c}{d-c}$

Als nichtlineare Gleichungen werden alle Gleichungen bezeichnet, die nicht in die Form (4) gebracht werden können. Da unendlich viele Variationen von Nichtlinearität denkbar sind, wird die (generisch) implizite Form als

$$f(x) = 0$$

dargestellt, wobei f eine nicht weiter spezifizierte Funktion von x ist. Vgl. Kapitel "Funktionen". Nichtlineare Gleichungen sind in zweifacher Hinsicht problematisch:

Lösen von Gleichungen mit einer Unbekannten

1. Lösungen sind i.a. nicht in expliziter Form darstellbar, sondern mittels numerischer Linearisierungsverfahren, wie z.B. Taylorreihen (vgl. Kapitel "Integration"), zu approximieren.
2. Lösungen sind i.a. nicht eindeutig, d.h. es existieren mehr als eine Lösung.

Wichtige Ausnahmen bzgl. dieser Probleme sind Potenz- und Exponentialgleichungen, die im Folgenden diskutiert werden.
Einen Spezialfall einer Potenzgleichung haben wir bereits auf S. 40 kennengelernt: die quadratische Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$. Dort konnten wir bereits folgern, dass trotz Nichtlinearität quadratische Gleichungen eine explizite Form und zwei (komplexe) Lösungen besitzen.

Potenzrechnung

Definition 34 (Potenzen).

$\forall\, x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$:

$$x^n := \underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{n\text{-mal}}$$

x wird als die Basis (oder Grundzahl) und n als Exponent (oder Hochzahl) bezeichnet.

Theorem 35 (Rechenregeln für Potenzen).

$\forall\, x, y \in \mathbb{R}, m, n \in \mathbb{N}$:

1. $x^m \cdot x^n = x^{m+n}$
2. $\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$ *für* $x \neq 0$
3. $(x \cdot y)^n = x^n \cdot y^n$
4. $\left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}$ *für* $y \neq 0$
5. $(x^m)^n = x^{m \cdot n}$
6. $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$ *für* $x \neq 0$
7. $x^{1/n} =: \sqrt[n]{x}$ *für* $x \geqslant 0$
8. $x^{m/n} = \sqrt[n]{x^m} = (\sqrt[n]{x})^m$ *für* $x \geqslant 0$
9. $|x| = \sqrt{x^2}$

Potenzrechnung

Wichtige Konventionen

$$x^0 := \begin{cases} \text{nicht definiert} & \text{für } x = 0 \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

$\sqrt[0]{0} := 0$

$x^{m^n} := x^{(m^n)}$

Die $n$te Wurzel ist die Umkehrung (oder Annihilation) der $n$ten Potenz x^n in dem Sinne, dass sie die $n$te Potenz zur Basis x löst:

$$\sqrt[n]{x^n} = (x^n)^{1/n} = x^{n/n} = x^1 = x$$

Allgemein gilt, dass die $n$te Potenzgleichung auch n Lösungen besitzt. Vgl. "Fundamentalsatz der Algebra" auf S. 20 in Riedel und Wichardt (2007). Wir veranschaulichen im Folgenden einige wichtige Einsichten bzgl. der $n$ten Wurzel anhand der Lösungen $y = \sqrt[n]{x}$:

- Gegeben sei $n = 2$ und $x = 4$. Dann gilt

  $$y = \sqrt[n]{x} = \sqrt[2]{4} = \sqrt{4} = 2$$

  was mittels $y^n = 2^2 = 4$ verifiziert werden kann. Dies ist die Lösung, die man durch

Potenzrechnung

Verwendung eines Taschenrechners erhält, jedoch wissen wir darüber hinaus, dass wegen $n = 2$ auch zwei Lösungen existieren müssen. Betrachtet man $y = -2$, so gilt

$$y^n = (-2)^2 = (-1)^2 \cdot (2)^2 = 4$$

was die zweiten Lösung sein muss, d.h. $y_{1,2} = \pm 2$. (Man beachte, dass sich dies ebenfalls aus der Lösungsformel auf S. 40 ergibt, wenn man $z = y$, $p = 0$ und $q = -4$ einsetzt.)

- Gegeben sei $n = 3$ und $x = 8$. Dann gilt

$$y = \sqrt[n]{x} = \sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2 \cdot 2 \cdot 2} = \left(2^3\right)^{1/3} = 2$$

was mittels $y^n = 2^3 = 8$ verifiziert werden kann. Dies ist eine der $n = 3$ Lösungen und die einzige Reelle, da $y = -2$ keine Lösung ist:

$$y^n = (-2)^3 = (-1)^3 \cdot 2^3 = (-1) \cdot 8 = -8 \neq 8 = x\ .$$

Die genaue Berechnung der komplexen Lösungen würde zu weit führen, weshalb wir diese an dieser Stelle nur erwähnen: $y = -1 \pm \sqrt{3}\,\mathsf{i}$, was sich wieder auf üblichem Wege verifizieren lässt. D.h. $y_1 = 2$ und $y_{2,3} = -1 \pm \sqrt{3}\,\mathsf{i}$.

- Gegeben sei $n = 4$ und $x = 16$. Dann gilt

$$y = \sqrt[n]{x} = \sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} = \left(2^4\right)^{1/4} = 2$$

was mittels $y^n = 2^4 = 16$ verifiziert werden kann. Dies ist eine der $n = 4$ Lösungen. Die zweite Lösung ist wieder $y = -2$, weil

$$y^n = (-2)^4 = (-1)^4 \cdot (2)^4 = 16 \ .$$

Somit müssen die verbleibenden Lösungen komplex sein, was leicht zu zeigen ist, weil für $y = \pm 2\mathrm{i}$ gilt, dass

$$y^n = (\pm 2\mathrm{i})^4 = (\pm 1)^4 \cdot 2^4 \cdot \mathrm{i}^4 = 1 \cdot 16 \cdot (\sqrt{-1})^4 = 16 \cdot (-1)^2 = 16 \ .$$

D.h. $y_{1,2} = \pm 2$ und $y_{3,4} = \pm 2\mathrm{i}$.

- Gegeben sei $n = 2$ und $x = -4$. Dann gilt

$$y = \sqrt[n]{x} = \sqrt[2]{-4} = \sqrt{-4} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{4} = 2\mathrm{i}$$

was mittels $y^n = (2\mathrm{i})^2 = 2^2 \cdot \left(\sqrt{-1}\right)^2 = -4$ verifiziert werden kann. Dies ist eine der $n = 2$ Lösungen. Die zweite Lösung ist $y = -2\mathrm{i}$, da

$$y^n = (-2\mathrm{i})^2 = (-2)^2 \cdot \left(\sqrt{-1}\right)^2 = -4 \ .$$

D.h. $y_{1,2} = \pm 2\mathrm{i}$.

- Gegeben sei $n = 3$ und $x = -8$. Dann gilt

$$y = \sqrt[n]{x} = \sqrt[3]{-8} = \sqrt[3]{-1} \cdot \sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{(-1)^3} \cdot 2 = -2$$

was mittels $y^n = (-2)^3 = -8$ verifiziert werden kann. Dies ist eine der $n = 3$ Lösungen und die einzige Reelle, da $y = 2$ keine Lösung ist:

$$y^n = 2^3 = 8 \neq -8 = x \ .$$

Damit müssen die verbleibenden zwei Lösungen, die $y = 1 \pm \sqrt{3}\,\mathrm{i}$ entsprechen, komplex

Potenzrechnung

sein. D.h. $y_1 = -2$ und $y_{2,3} = 1 \pm \sqrt{3}\,\mathsf{i}$.

- Gegeben sei $n = 4$ und $x = -16$. Nun sind alle $n = 4$ Lösungen komplex, d.h. $y_{1,2} = \sqrt{2} \pm \sqrt{2}\,\mathsf{i}$ und $y_{3,4} = -\sqrt{2} \pm \sqrt{2}\,\mathsf{i}$.

Nach eingehender Betrachtung lassen sich die obigen Fälle verallgemeinern zu folgender Zusammenfassung, die sich auf reelle Lösungen ($n$te Wurzeln) beschränkt, da komplexe Lösungen in dieser Veranstaltung nicht weiter relevant sind:

Zusammenfassung

- Für jedes $n \in \mathbb{N}$ besitzen positive reelle x mindestens eine reelle $n$te Wurzel.
- Für jedes geradzahlige $n \in \mathbb{N}$ besitzen positive reelle x eine positive reelle und eine negative reelle $n$te Wurzel.
- Für jedes ungeradzahlige $n \in \mathbb{N}$ besitzen positive reelle x genau eine positive reelle $n$te Wurzel.
- Für jedes geradzahlige $n \in \mathbb{N}$ besitzen negative reelle x keine reelle $n$te Wurzel.
- Für jedes ungeradzahlige $n \in \mathbb{N}$ besitzen negative reelle x genau eine negative reelle $n$te Wurzel.

Potenzrechnung

Nachdem wir nun wissen, wie man die Potenzgleichung $y = x^n$ nach der Unbekannten x löst, soll im Folgenden erklärt werden, wie man zur Lösung gelangt, wenn die Unbekannte x im Exponenten steht. Eine Gleichung der Form

$$y = b^x \tag{6}$$

wird Exponentialgleichung genannt.

Definition 36 (Logarithmen).

Der (reelle) Logarithmus von y zur Basis b ist definiert als

$$\mathsf{log}_b(y) := x \tag{7}$$

$\forall\, y \in \mathbb{R}_+, b \in \mathbb{R}_+ \backslash \{1\}$, so dass er (6) löst.

Der Logarithmus ist die Annihilation des Potenzierens in dem Sinne, dass das Logarithmieren beider Seiten von (6), d.h. $\mathsf{log}_b(y) = \mathsf{log}_b(b^x)$,

$$\boxed{\mathsf{log}_b(b^x) = x}$$

liefert, da $\log_b(y) = x$ aufgrund von (7). Die Annihilation funktioniert nicht nur durch das Logarithmieren einer Potenz, sondern auch durch das Potenzieren eines Logarithmus, d.h., (7) in (6) liefert

$$\boxed{y = b^{\log_b(y)} \; .}$$

Theorem 37 (Rechenregeln für Logarithmen).

$\forall\, x, y, n \in \mathbb{R}_+, a, b \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$:

1. $\log_b(x \cdot y) = \log_b(x) + \log_b(y)$
2. $\log_b\left(\frac{x}{y}\right) = \log_b(x) - \log_b(y)$
3. $\log_b(b^x) = x \cdot \log_b(b) = x$
4. $\log_b(\sqrt[n]{x}) = \log_b\left(x^{1/n}\right) = \frac{1}{n} \cdot \log_b(x)$
5. $\log_b(x) = \frac{\log_a(x)}{\log_a(b)}$ *(Basisumrechnung)*

Potenzrechnung

Wichtige Logarithmen

- **dekadischer Logarithmus** log (zur Basis $b = 10$)
  $\hookrightarrow$ Verwendung: Skalierung mittels log verbessert die gleichzeitige grafische Darstellung sehr kleiner und großer Zahlen, die durch eine Zehnerbasis repräsentiert werden können (z.B. $0.000001 = 10^{-6}$ vs. $1.000.000 = 10^6$)
- **binärer Logarithmus** lb (zur Basis $b = 2$)
  $\hookrightarrow$ Verwendung: Informationstheorie (Mächtigkeit von Mengen $\left|\mathcal{P}(M)\right| = 2^n$) und Informatik (Rechnerarchitektur)
- **natürlicher Logarithmus** ln (zur Basis $b = \mathsf{e}$)
  $\hookrightarrow$ Verwendung: Der mit Abstand wichtigste Logarithmus, da die Euler'sche Zahl viele Wachstumsprozesse (z.B. Zinseszinseffekt) beschreibt.

!Achtung: Manchmal wird der natürliche Logarithmus in der Literatur auch durch log repräsentiert.

Summen

Definition 38 (Summenzeichen).

$\forall\, k, m \in \mathbb{Z}$ mit $i = k, k+1, \ldots, m$ und $\forall\, a_i \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{i=k}^{m} a_i := \begin{cases} a_k + a_{k+1} + \ldots + a_m & \text{für alle } k \leqslant m \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

i wird als Summationsindex, k als Untergrenze und m als Obergrenze bezeichnet.

Wichtig

Ist aus dem vorgegebenen Kontext heraus die Indexmenge der Summation offensichtlich, so wird meistens auf die explizite Darstellung zugunsten der kompakteren Schreibweise $\sum_i a_i$ oder $\sum a_i$ verzichtet.

Summen

Theorem 39 (Rechenregeln für Summenzeichen).

$\forall\, k, m, n \in \mathbb{Z}$ mit $k \leqslant m \leqslant n$ und $\forall\, a_i, b_i, c \in \mathbb{R}$ mit $i = k, k+1, \ldots, m-1, m, m+1, \ldots, n$:

1. $\sum_{i=k}^{m} c = (m-k+1)c$
2. $\sum_{i=k}^{m} ca_i = c \sum_{i=k}^{m} a_i$
3. $\sum_{i=k}^{n} a_i = \sum_{i=k}^{m} a_i + \sum_{i=m+1}^{n} a_i$
4. $\sum_{i=k}^{m} (a_i + b_i) = \sum_{i=k}^{m} a_i + \sum_{i=k}^{m} b_i$

Summen

Definition 40 (Doppelsummen).

$\forall\, k, l, m, n \in \mathbb{Z}$ mit $k \leqslant m$ und $l \leqslant n$, und $\forall\, a_{ij} \in \mathbb{R}$ mit $i = k, k+1, \ldots, m$ und $j = l, l+1, \ldots, n$:

$$\begin{aligned}\sum_{i=k}^{m} \sum_{j=l}^{n} a_{ij} := {} & a_{kl} + a_{kl+1} + \ldots + a_{kn} + \\ & a_{k+1,l} + a_{k+1,l+1} + \ldots + a_{k+1,n} + \\ & \vdots \\ & a_{ml} + a_{ml+1} + \ldots + a_{mn}\end{aligned}$$

Theorem 41 (Rechenregeln für Doppelsummen).

$$\sum_{i=k}^{m} \sum_{j=l}^{n} a_{ij} = \sum_{j=l}^{n} a_{kj} + \sum_{j=l}^{n} a_{k+1,j} + \ldots + \sum_{j=l}^{n} a_{mj} = \sum_{j=l}^{n} \sum_{i=k}^{m} a_{ij}$$

Summen

Beispiel: Umsatzmatrix

Eine Fast-Food-Kette besitzt drei Filialen in München. Der jeweilige Umsatz pro Quartal kann mittels einer sog. Matrix kompakt und übersichtlich dargestellt werden.

	i \ j	Quartal 1	2	3	4	Jahresumsatz pro Filiale
Filiale	1	u_{11}	u_{12}	u_{13}	u_{14}	$\sum_{j=1}^{4} u_{1j}$
	2	u_{21}	u_{22}	u_{23}	u_{24}	$\sum_{j=1}^{4} u_{2j}$
	3	u_{31}	u_{32}	u_{33}	u_{34}	$\sum_{j=1}^{4} u_{3j}$
Gesamtumsatz pro Quartal		$\sum_{i=1}^{3} u_{i1}$	$\sum_{i=1}^{3} u_{i2}$	$\sum_{i=1}^{3} u_{i3}$	$\sum_{i=1}^{3} u_{i4}$	$\sum \sum u_{ij}$

Summen

Beispiel: Umsatzmatrix (Forts.)

Der jährliche Gesamtumsatz lässt sich folglich entweder als Gesamtumsatz über alle Quartale oder als jährlicher Umsatz über alle Filialen berechnen.

Produkte

Definition 42 (Produktzeichen).

$\forall\, k, m \in \mathbb{Z}$ mit $i = k, k+1, \ldots, m$ und $\forall\, a_i \in \mathbb{R}$:

$$\prod_{i=k}^{m} a_i := \begin{cases} a_k \cdot a_{k+1} \cdot \ldots \cdot a_m & \text{für alle } k \leqslant m \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

i wird als Multiplikationsindex, k als Untergrenze und m als Obergrenze bezeichnet.

Theorem 43 (Rechenregeln für Produktzeichen).

$\forall\, k, m \in \mathbb{Z}$ mit $k \leqslant m$ und $\forall\, a_i, b_i, c \in \mathbb{R}$ mit $i = k, k+1, \ldots, m$:

1. $\prod_{i=k}^{m} c = c^{m-k+1}$
2. $\prod_{i=k}^{m} c a_i = c^{m-k+1} \prod_{i=k}^{m} a_i$
3. $\prod_{i=k}^{m} (a_i \cdot b_i) = \prod_{i=k}^{m} a_i \cdot \prod_{i=k}^{m} b_i$
4. $\prod_{i=k}^{m} a_i^2 = \left(\prod_{i=k}^{m} a_i\right)^2$

Binomischer Satz

Definition 44 (Fakultät).

$\forall\, n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$:

$$n! := 1 \cdot 2 \cdot \ \dots \ \cdot (n-1) \cdot n = \prod_{i=1}^{n} i \quad \text{und} \quad 0! := 1$$

Definition 45 (Binomialkoeffizienten).

$\forall\, n, k \in \mathbb{N}$:

$$\binom{n}{k} := \begin{cases} \frac{n!}{k!(n-k)!} & \text{für } n \geqslant k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Binomischer Satz

Theorem 46 (Eigenschaften des Binomialkoeffizientens).

$\forall\, n, k \in \mathbb{N}$:

1. $\binom{n}{k} \in \mathbb{N}$
2. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
3. $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$
4. $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$
5. $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

Theorem 47 (Binomischer Satz).

$\forall\, n \in \mathbb{N}$ *und* $\forall\, a, b \in \mathbb{R}$:

$$\underbrace{(a+b)^n}_{\textit{Binom}} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Binomischer Satz

Im Pascal'schen Dreieck sind die Werte des Binomialkoeffizientens $\binom{n}{k}$ zeilenweise für $k = 0, 1, \ldots, n$ abgetragen, wobei jede Zahl innerhalb des Dreiecks der Summe der direkt über ihr stehenden Zahlen entspricht:

$n \backslash k$	$\binom{n}{k}$	$\binom{n}{k}$
0	$\binom{0}{0}$	1
1	$\binom{1}{0}\quad\binom{1}{1}$	1 1
2	$\binom{2}{0}\quad\binom{2}{1}\quad\binom{2}{2}$	1 2 1
3	$\binom{3}{0}\quad\binom{3}{1}\quad\binom{3}{2}\quad\binom{3}{3}$	1 3 3 1
4	$\binom{4}{0}\quad\binom{4}{1}\quad\binom{4}{2}\quad\binom{4}{3}\quad\binom{4}{4}$	1 4 6 4 1

Theorem 48 (Binomische Formeln).

1. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
2. $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
3. $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$